

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapă locală, 07.02.2026

Filiera teoretică – Științe ale naturii

Clasa a XI-a

1. a) (10p) Un arhitect proiectează un parc sub forma unui triunghi ABC . Dacă se folosește un reper cartezian xOy , atunci colțul sud-vestic este $A(-10, -13)$, colțul nord-vestic este $B(-2, 3)$ și colțul estic este $C(2, 1)$. Pentru a instala un stâlp de iluminat, arhitectul are nevoie de cea mai scurtă distanță de la punctul B până la aleea centrală care pornește din punctul C și merge până în mijlocul laturii opuse. Determinați distanța căutată de arhitect.

b) (10p) Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $a > 0$ și punctele $M_x(x, f(x))$, $x \in R$. Determinați valorile lui a pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) \cdot \text{Aria}[M_x M_{x+1} M_{x+2}]}{x^2 + 1} = 25$.

2. (20p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in R$ astfel încât $a + d = 2$ și $ad - bc = 3$. Arătați că $\det(A^2 + 3I_2) = 4 + \det(A^2 + I_2)$.

3. a) (10p) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

b) (15p) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(2026x)}{2026\sqrt[3]{1+x}-1}$.

4. a) (10p) Se consideră funcțiile $f_n: R \setminus \{-1, 1\} \rightarrow R$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^n} - 1}$, $n \in N^*$ și $f: R \setminus \{-1, 1\} \rightarrow R$,

$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+f_1(x) & 1 \\ 1 & 1 & 1+f_2(x) \end{vmatrix}$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1) \cdot f(x)]$.

b) (15p) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f: R \setminus \{0\} \rightarrow R$, $f(x) = |x-1| \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.